Mercredi 28 avril 2004 Term S

Bac Blanc II
Mathématiques (4 h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 (élèves suivant la spécialité S.V.T. ou Sc. Physiques)

Partie A

1°) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$.
Les solutions seront notées z' et z'', z' désignant la solution dont la partie imaginaire est positive.
Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

2°) Donner la valeur exacte de $(z')^{2004}$ sous forme algébrique.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$; (unité graphique : 2 cm).

1°) Montrer que les points A d'affixe $1 + i\sqrt{3}$ et B d'affixe $1 - i\sqrt{3}$ sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
Tracer ce cercle puis construire les points A et B.

2°) On note O' l'image du point O par la rotation r_1 de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$

et B' l'image du point B par la rotation r_2 de centre A et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.

Calculer les affixes des points O' et B' et construire ces points.

3°) Soit I le milieu du segment [OB].

a) Que peut-on conjecturer pour la droite (AI) dans le triangle AO'B' ?

b) Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AI}$.

Montrer que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{O'B'}$ est égale à $3\sqrt{3} - i$.

c) La conjecture émise à la question a) est-elle vraie ?

Exercice 1 (élèves suivant la spécialité Mathématiques)

Chaque question comporte 5 affirmations, chacune d'elles peut être Vraie ou Fausse. Vous devez inscrire dans chacune des 5 cases des 5 questions un « V » si vous pensez que l'affirmation correspondante est Vraie, un « F » si vous pensez qu'elle est Fausse ; ne rien inscrire si vous ne savez pas ! Il sera compté 0,2 pour chaque bonne réponse (+ 0,2) et enlevé 0,2 pour chaque mauvaise réponse (– 0,2), aucun point n'est accordé en cas d'absence de réponse (+ 0,0). L'exercice est donc noté sur 5.

Remarque : Pour chaque question, une note négative sera ramenée à 0.

Exercice 2 (commun à toutes les spécialités)

Les résultats de cet exercice seront donnés sous forme décimale arrondie au centième.
Les trois parties A, B et C sont indépendantes.

Un camp d'adolescents propose des stages d'activités nautiques pour débutants avec au choix : planche à voile, plongée ou ski nautique.
Lors d'un stage donné, ce camp accueille vingt jeunes dont sept seront initiés à la planche à voile, huit à la plongée et cinq au ski nautique. Chaque stagiaire ne pratique qu'une seule des trois activités.

Partie A

On forme un groupe de 3 stagiaires choisis au hasard parmi les vingt.

1°) Combien de groupes est-il possible de former ?

2°) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « Les trois stagiaires pratiquent des activités différentes » ;
B : « Les trois stagiaires pratiquent la même activité » ;
C : « au moins l'un des trois stagiaires pratique le ski nautique ».

Partie B

Parmi les vingt stagiaires, un seul se prénomme Christian.
Chaque jour, on choisit au hasard un groupe de trois stagiaires chargé du service au repas de midi.

1°) Montrer que la probabilité que Christian soit choisi un jour donné pour le service de midi est égale à 0,15.

2°) La durée du stage est de cinq jours.
a) Quelle est la probabilité de ne jamais choisir Christian pour le service de midi pendant le séjour ?
b) Quelle est la probabilité de le choisir au moins une fois ?
c) Montrer que le probabilité de choisir Christian au moins deux fois est inférieure à 0,2.

Partie C

En fin de séjour on choisit une activité au hasard, puis on choisit toujours au hasard un stagiaire ayant suivi cette activité pour faire un compte-rendu de la semaine. Sur les vingt stagiaires il y a huit filles : quatre en plongée, trois en planche à voile et une au ski nautique.

1°) Quelle est la probabilité que ce soit une fille qui fasse le compte-rendu de fin de semaine ?

2°) C'est finalement une fille qui fait le compte-rendu, quelle est la probabilité qu'elle ait fait de la plongée ?

Exercice 3 (commun à toutes les spécialités)

Partie A

On considère la fonction numérique f de la variable réel x définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = \sqrt{x}\, e^{1-x}$.

Elle est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. On note f' sa dérivée.
On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Déterminer la limite de f en $+\infty$ (On pourra pour cela justifier et exploiter l'écriture, pour tout x réel strictement positif, $f(x) = \frac{e}{\sqrt{x}} \frac{x}{e^x}$).

Interpréter graphiquement le résultat.

2°) Pour x élément de $]0 ; +\infty[$, calculer $f'(x)$.

3°) Déduire des questions précédentes le tableau de variation de f.

4°) Tracer la courbe (C) (unité graphique : 2 cm).

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$.

1°) Interpréter géométriquement u_n.

2°) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

3°) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

4°) Prouver la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

Partie C

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur $[1 ; +\infty[$ par

$F(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$.

1°) a) Montrer que F est dérivable sur $[1 ; +\infty[$ et calculer $F'(x)$.
b) En déduire le sens de variation de F.

2°) a) Démontrer que, pour tout réel t positif, $t + 2 \geq 2\sqrt{2}\sqrt{t}$.

b) En déduire que, pour tout x de l'intervalle $[1 ; +\infty[$, $F(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_1^x (t+2)e^{1-t}\mathrm{d}t$.

c) À l'aide d'un intégration par parties, montrer que, pour tout x appartenant à $[1 ; +\infty[$,

$\int_1^x (t+2)e^{1-t}\mathrm{d}t = 4 - (x+3)e^{1-x}$

d) En déduire que, pour tout x appartenant à $[1 ; +\infty[$, $0 \leq F(x) \leq \sqrt{2}$.

3°) On note, pour tout entier naturel n non nul, S_n la somme des $n - 1$ premiers termes de la suite (u_n).
Exprimer S_n à l'aide d'une intégrale. Montrer que la suite (S_n) converge et donner un encadrement de sa limite.

NOM, Prénom, Classe : ……………………………………………………………………………

Mercredi 28 avril 2004 Term S

Bac Blanc II
Mathématiques (4 h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 (élèves suivant la spécialité Mathématiques)

Chaque question comporte 5 affirmations, chacune d'elles peut être Vraie ou Fausse. Vous devez inscrire dans chacune des 5 cases des 5 questions un « V » si vous pensez que l'affirmation correspondante est Vraie, un « F » si vous pensez qu'elle est Fausse ; ne rien inscrire si vous ne savez pas ! Il sera compté 0,2 pour chaque bonne réponse (+ 0,2) et enlevé 0,2 pour chaque mauvaise réponse (– 0,2), aucun point n'est accordé en cas d'absence de réponse (+ 0,0). L'exercice est donc noté sur 5.

Remarque : Pour chaque question, une note négative sera ramenée à 0.

Question 1	a		b		c		d		e	
Question 2	a		b		c		d		e	
Question 3	a		b		c		d		e	
Question 4	a		b		c		d		e	
Question 5	a		b		c		d		e	

Question 1

Soient a, b et d trois entiers relatifs tels que d divise a et b, alors :

a) d^2 divise ab.
b) d^2 divise $a + b$.
c) d^2 divise $a^2 + b^2$.
d) $a + b$ divise $a^3 + b^3$.
e) $a – b$ est un multiple de d.

Question 2

La somme de trois nombres impairs consécutifs…

a) est toujours un nombre premier
b) n'est jamais un nombre premier
c) est un multiple de 3
d) peut être un multiple de 9
e) possède au moins deux diviseurs positifs autre que 1.

Question 3

Soient $k \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \in]-\pi \,;\, \pi]$, $b \in \mathbb{C}$, alors : $z' = k\, e^{i\alpha} z + b$. est l'écriture complexe …

a) d'une translation dès que $\alpha = 0$.
b) d'une rotation d'angle α dès que $|\, k\,| = 1$.
c) d'une homothétie dès que $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$.
d) de la composée, dans l'ordre, d'une rotation d'angle α, d'une homothétie de rapport k et d'une translation.
e) avec $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ et $k = 2$, d'une transformation possédant au moins un point invariant.

Question 4

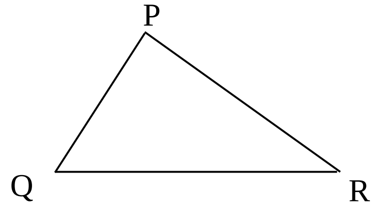
a) L'image d'une droite par une similitude directe est une droite parallèle.
b) Une similitude directe de rapport k multiplie les aires par k

Soit s la similitude directe du plan de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$ et de centre M_0 d'affixe $z_0 = 1 - i$.

c) s a pour écriture complexe : $z' = \left(\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)z + 1 - i$.
d) L'image par s de la droite D d'équation $x + y = \sqrt{2}$ est la droite D' d'équation $y = \sqrt{2}$.
e) La réciproque s^{-1} de s a pour écriture complexe : $z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3i\pi}{4}}z - 1$.

Question 5

Dans le plan on considère trois points non alignés P, Q, R et α, β, γ des mesures des angles $\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right)$, $\left(\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{QP}\right)$ et $\left(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}\right)$. On appelle :



- $r_{P,\alpha}$ la rotation de centre P et d'angle α,
- $r_{Q,\beta}$ la rotation de centre Q et d'angle β,
- $r_{R,\gamma}$ la rotation de centre R et d'angle γ,
- I le point d'intersection des bissectrices du triangle (PQR)

alors :

a) $r_{Q,\beta}$ est la composée de la réflexion d'axe (IQ) suivie de la réflexion d'axe (QR)
b) $r_{Q,\beta} \circ r_{R,\gamma}$ est la réflexion d'axe (IR)
c) $r_{Q,\beta} \circ r_{R,\gamma}$ est la rotation de centre I et d'angle $\pi - \alpha$
d) $r_{P,\alpha} \circ r_{Q,\beta} \circ r_{R,\gamma}$ est la rotation de centre I et d'angle $\alpha + \beta + \gamma$
e) $r_{P,\alpha} \circ r_{Q,\beta} \circ r_{R,\gamma}$ est une symétrie centrale