Vendredi 19 décembre Term S

Mathématiques - Bac Blanc (4h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(**5 points :** Réservé aux spécialités Sc. Physiques et Sc. Naturelles)*

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, (unité graphique : 4 cm), on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour chaque point M du plan, d'affixe z, M_1 d'affixe z_1 désigne l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, puis M' d'affixe z' l'image de M_1 par la translation de vecteur $-\vec{u}$.

Enfin, on note T la transformation qui, à chaque point M, associe le point M'.

1°) a) Démontrer que : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1$.

b) Déterminer l'image du point B par T.

c) Montrer que T admet un unique point invariant dont on précisera l'affixe.

2°) On pose $z = x + iy$, avec x et y réels.

a) Pour z non nul, montrer que la partie réelle du quotient $\frac{z'}{z}$ est égale à : $\frac{x^2+y^2-2x}{2(x^2+y^2)}$.

b) Démontrer que l'ensemble (E) des points M du plan, tels que le triangle OMM' soit rectangle en O, est un cercle (C), dont on précisera le centre et le rayon, privé de deux points. Tracer (E).

3°) Dans cette question, on pose $z = 1 + i$.

a) Vérifier que M appartient à (E). Placer M et M' sur la figure.

b) Calculer le module de z'.

Calculer l'aire, en cm^2, du triangle OMM'.

ATTENTION

Ne traiter que l'exercice 1 correspondant à votre spécialité ! ! !

Exercice 1 *(**5 points :** Réservé aux spécialités Mathématiques)*

1°) On considère l'équation (E) : $17x - 6y = 2$, où x et y sont des entiers.

a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $17x = 6y$.

b) Montrer que le couple (-1 ; -3) est une solution particulière de l'équation : $17x - 6y = 1$; en déduire une solution particulière de (E).

c) En déduire tous les couples de $\mathbb{Z}^2$ solutions de l'équation (E).

d) Montrer que le PGCD des couples solutions de (E) est 1 ou 2.

e) Déterminer les couples $(x\,;y)$ de $\mathbb{Z}^2$ solutions de (E) dont le PGCD est 2.

f) Déterminer le couple $(x_0\,;y_0)$ solution de (E) tel que : PGCD$(x_0\,;y_0) = 2$ et $100 \le y_0 \le 150$.

2°) Une bande de 17 pirates s'est emparé d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager équitablement et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors 3 pièces. Mais leur bateau fait naufrage et seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés : le partage laisserait alors 5 pièces d'or au cuisinier.

a) On note N le nombre de pièces d'or du butin, x le nombre de pièces de chaque pirate avant le naufrage et y le nombre de pièces d'or de chaque pirate après le naufrage. Exprimer N en fonction de x, puis en fonction de y.

b) Ecrire alors la relation liant x et y.

c) En utilisant les résultats de la question 1°c), déterminer la fortune minimale que peut espérer le cuisinier quand il décide d'empoisonner le reste des pirates avec du civet de rat.

Exercice 2 *(5 points : Commun à toutes les spécialités)*

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer en le justifiant si elle est vraie ou si elle est fausse.

1°) L'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z telle que $\left|\frac{z+1}{z-i}\right| = 1$ est une droite.

2°) Il existe plusieurs entiers naturels n tels que le nombre $(\sqrt{6} - i\sqrt{2})^n$ soit un entier naturel.

3°) Toute fonction continue sur $[a\,;b]$ est dérivable sur $]a\,;b[$.

4°) Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur $[a\,;b]$ on note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.
Si $f \leq g$ sur $[a\,;b]$ et $f'(a) = g'(a)$ alors $f' \leq g'$ sur $[a\,;b]$.

5°) Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[a\,;b]$ on note F et G une de leurs primitives respectives.
Si $f \leq g$ sur $[a\,;b]$ et $F(a) = G(a)$ alors $F \leq G$ sur $[a\,;b]$.

Exercice 3 *(5 points : Commun à toutes les spécialités)*

Partie A

Soit (E_1) l'équation différentielle : $y' = 2y + 4x$

1°) Soit et h la fonction définie sur R par : $h(x) = -2x - 1$

a) Vérifier que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E_1) sur R.
b) Démontrer qu'une fonction $f = g + h$ est solution de (E_1) sur R si et seulement si g est solution de :
(E_2) : $y' = 2y$ sur R.

2°) a) Déterminer les solutions g de l'équation différentielle (E_2) sur R.
b) En déduire les solutions f de (E_1) sur R.

3°) Déterminer la solution de (E_1) sur R vérifiant $f(0) = 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = e^{2x} - 2x - 1$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1°) a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Démontrer que la droite d'équation $y = -2x - 1$ est asymptote oblique à la courbe (C_f) et préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote oblique.

2°) Etudier les variations de f sur R et dresser son tableau de variation complet sur R.
(On ne demande pas le tracé de la courbe (C_f))

Exercice 4 *(5 points : Commun à toutes les spécialités)*

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = (x^3 - 1)\sqrt{x^2 + 1}$

1°) Faire apparaître sur l'écran de la calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre $-5 \leq x \leq 5$, $-4 \leq y \leq 4$.
Reproduire l'allure de la courbe obtenue sur la copie.

2°) D'après la représentation graphique que pourrait-on conjecturer sur les variations de la fonction f ?

3°) On se propose maintenant d'étudier la fonction f.

a) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et en déduire que le signe de $f'(x)$ et le même que celui de $P(x) = 4x^4 + 3x^2 - x$.
b) Soit $Q(x) = 4x^3 + 3x - 1$, étudier les variations de Q sur R et démontrer que l'équation $Q(x) = 0$ admet une unique solution α sur R dont on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.
c) En déduire le signe de $Q(x)$ puis le signe de $f'(x)$.
d) Dresser le tableau de variation de f sur R. (le calcul des limites n'est pas demandé)

4°) On veut représenter sur l'écran de la calculatrice les informations trouvées dans le 3°, quels intervalles choisir pour la fenêtre de la calculatrice ? On donnera un intervalle d'amplitude 0,5 en abscisse et d'amplitude 0,02 en ordonnée.