Mercredi 5 mai 2004 $1^{\text{ère}}$ S

Devoir de Synthèse - Mathématiques (3h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1

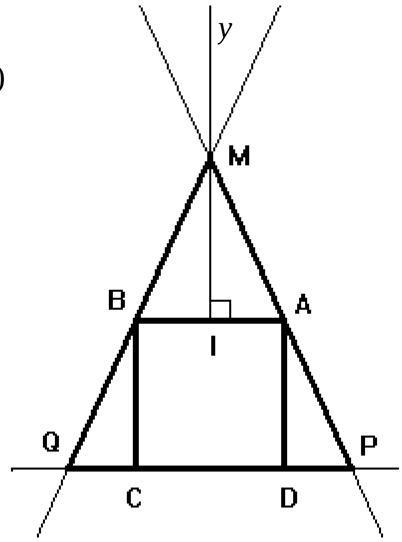
Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + 4 + \dfrac{4}{x}$.

1°) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et montrer que sa courbe représentative (C_f) admet deux asymptotes que l'on précisera.
2°) Etudier les variations de f.
3°) Tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormal. (unité graphique : 1 cm)

Partie B

ABCD est un carré du plan tel que AB = 2. I est le milieu de [AB]. M est un point variable différent de I sur la demi-droite [Iy) perpendiculaire à la droite (AB) et représentée ci-contre. Les droites (MA) et (MB) coupent la droite (CD) en P et Q respectivement. On pose IM = x.
Soit g la fonction qui à x associe l'aire du triangle MPQ.



1°) Quel est l'ensemble de définition de g ?
2°) a) Exprimer $g(x)$ en fonction de x.
b) Où faut-il placer M pour que l'aire du triangle MPQ soit minimale ?

Exercice 2

Une observation faite sur la fréquentation d'un stade de football a permis de constater, pour chaque année, un taux de réabonnement de 80%, ainsi que l'apparition de 4 000 nouveaux abonnés.
L'objet de cet exercice est l'étude du devenir du nombre annuel des abonnés, en supposant que la situation décrite par l'observation reste la même au fil des ans.
Les question 2. et 3. peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.
On note a_n le nombre des abonnés à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année et on précise que $a_0 = 7\,000$.

1°) Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 4\,000$.

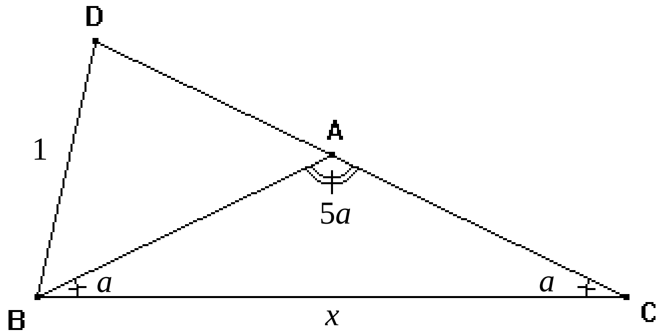
2°) L'objet de cette question est l'étude graphique de la suite (a_n).
On considère un repère orthonormal (unité graphique : 0,5 cm représente 1 000 abonnés).
a) Tracer dans ce repère la droite (D) d'équation $y = 0{,}8x + 4\,000$ et la droite (Δ) d'équation $y = x$, pour les abscisses comprises entre 0 et 25 000.
b) Placer a_0 sur l'axe des abscisses. Utiliser les droites précédentes pour placer sur l'axe des abscisses les valeurs a_1, a_2 et a_3 en justifiant.
c) Si l'on poursuit le processus graphique précédent, quelle limite peut-on présumer pour la suite (a_n) ?

3°) L'objet de cette question est l'étude numérique de la suite (a_n).
Soit (u_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $u_n = 20\,000 - a_n$.
a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.
b) Soit n un nombre entier naturel ; exprimer u_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $a_n = 20\,000 - 13\,000 \times 0{,}8^n$.
c) En utilisant le résultat précédent, déterminer la limite de la suite (a_n).
d) Après combien d'années le nombre d'abonnés dépassera-t-il 16 000 ?

…/…

Exercice 3

Sur la figure ci-dessous, les triangles ABC et CBD sont isocèles respectivement en A et en C.
Les autres renseignements sont portés sur la figure.



1°) Donner une valeur de a en radians.
2°) Déterminer une mesure de chacun des angles $\widehat{BAD}$, $\widehat{ADB}$ et $\widehat{ABD}$ en fonction de a, puis leur mesure en radians. En déduire la nature du triangle BAD.
3°) Calculer AB et AC en fonction de x.
4°) En utilisant la règle des sinus, établir que : $\dfrac{\sin(3a)}{x} = \sin a$ et que $\dfrac{\sin(3a)}{x-1} = \sin(2a)$.
5°) En utilisant $3a = a + 2a$, établir que : $\sin(3a) = \sin a\,(4\cos^2 a - 1)$.
6°) En déduire que : $x = 4\cos^2 a - 1$ et que : $x - 1 = \dfrac{4\cos^2 a - 1}{2\cos a}$.
7°) Démontrer finalement que $\cos\dfrac{\pi}{7}$ est solution de l'équation $8X^3 - 4X^2 - 4X + 1 = 0$ que l'on ne cherchera pas à résoudre.

Exercice 4

Soient A(4 ; 5 ; 7), B(1 ; 8 ; 5), C(0 ; 3 ; 9) et D(7 ; 4 ; 5) dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1°) Démontrer que A, B, C déterminent un unique plan (ABC).
2°) Le point D appartient-il au plan (ABC) ?
3°) Démontrer que les points A, B, C, D appartiennent à une même sphère S de centre O dont on déterminera le rayon et une équation cartésienne.

Barème possible

Exercice 1 : *6,5 points*
Exercice 2 : *5,0 points*
Exercice 3 : *5,5 points*
Exercice 4 : *3,0 points*