

Mercredi 7 avril 2004

1^{ère} S₃

Devoir de Mathématiques (2h)
(Calculatrice autorisée)

Exercice I - Courbe asymptote. (5 points)

Soit $f: x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O; i, j)$

- 1°) a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
b) Démontrer que (C_f) admet une asymptote verticale.

2°) a) Montrer que pour tout x de D_f , $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $\sqrt{x} + h(x)$ où h est une fonction qui vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.

- b) Soit (C_g) la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. Quelle conséquence peut-on déduire de la question a) pour les courbes (C_f) et (C_g) ?
c) Etudier la position relative de ces deux courbes.
d) Etudier le sens de variation de f .
e) Tracer (C_f) et (C_g) sur un même graphique.

Exercice II (4,5 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 + \sqrt{2} \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 4} \end{cases}$$

- 1°) a) Calculer u_1 et u_2 .
b) Justifier que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq 1$.
2°) On pose $v_n = (u_n - 1)^2$.
a) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique
b) Calculer v_n puis u_n en fonction de n .

Exercice III (4,5 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{cases}$$

- 1°) a) Calculer u_1 , u_2 , u_3 ; la suite (u_n) est-elle géométrique ?
2°) Soit $v_n = u_{n+1} - u_n$; montrer que (v_n) est une suite géométrique.
3°) On pose $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.
a) Calculer S_n en fonction de n .
b) Montrer que $S_n = u_{n+1} - u_0$.
c) En déduire l'expression de u_{n+1} puis celle de u_n en fonction de n .

Exercice IV (3 points)

Un jardinier doit déposer une brouette d'engrais au pied de chacun des vingt arbres qui bordent un côté d'une allée. Les arbres sont espacés de 4 mètres et les sacs d'engrais se trouvent 15 mètres avant le premier arbre.

Quel chemin aura-t-il parcouru après avoir achevé son travail et ramené la brouette près des sacs d'engrais ?

Exercice V (3 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \overset{\uparrow}{i}, \overset{\uparrow}{j}, \overset{\uparrow}{k})$.

1°) déterminer une équation du cône C de centre O , d'axe (Ox) et passant par le point $A(-1 ; 1 ; 2\sqrt{2})$.

2°) Déterminer la nature puis l'équation de la section du cône C par le plan d'équation $x = 2$.
Préciser ses éléments caractéristiques.

3°) Déterminer la nature et les équations de la section du cône C par le plan (xOz) .