Mercredi 17 mars 2004 $1^{ère}$ S_3

DEVOIR de MATHEMATIQUES (2h)

(Calculatrice autorisée)

I/ Fonction trigonométrique. *(6 points)*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos 2x - 2\sqrt{2}\cos x - 1$.
et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1°) Vérifier que f est périodique de période 2π et étudier sa parité.
Justifier qu'on peut alors restreindre l'intervalle d'étude de f à $I = [0\,;\pi]$

2°) Démontrer que pour tout x de I on a : $f'(x) = -4\sin x.(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2})$

3°) Déterminer le signe de $A(x) = \sin x$ et de $B(x) = \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur I et en déduire les variations de f sur I. Dresser le tableau de variations complet de f sur I.
4°) Tracer la courbe C_f sur I.
5°) Compléter le tracé de la courbe C_f à $[-2\pi\,;\,2\pi]$ en justifiant la construction.

II/ Courbes et asymptotes. *(6 points)*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\,;\,1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3+3}{x^2-1}$

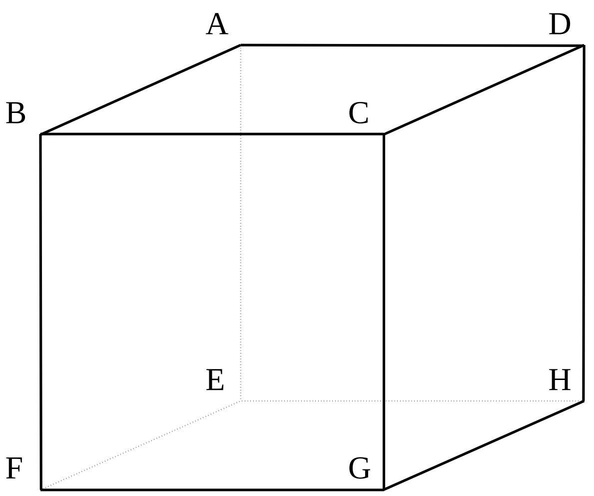
1°) Déterminer les réels a, b, c et d tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\,;\,1\}$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1} + \dfrac{d}{x+1}$

2°) En déduire, en justifiant, toutes les droites asymptotes à la courbe (C) représentative de f.
Déterminer la position relative de la courbe (C) et de la droite (D) d'équation $y = x$.

III/ Suites numériques. *(4 points)*

Soit u la suite définie par : $u_n = n + 1 - \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

et v la suite définie par : $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = (v_n)^2 - v_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1°) Calculer les 3 premiers termes de chaque suite.
2°) Etudier la monotonie de chaque suite.
3°) La suite u est-elle convergente ?



IV/ Géométrie dans l'espace. *(4 points)*

Soit un cube comme ci-contre, on note I le milieu de [AB], J le milieu de [DH] et K tel que $\overrightarrow{FK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$.

1°) Recopier le cube et placer I, J et K sur la figure.
2°) Justifier que la parallèle à (FG) passant par J et la droite (AE) sont sécantes. On note L leur point d'intersection.
3°) Justifier que les droites (LF) et (JK) sont sécantes.
On note M leur point d'intersection.
4°) Justifier que les droites (IM) et (BF) sont sécantes.
On note N leur point d'intersection.
5°) Justifier que le point N appartient au plan (IJK)
6°) Compléter, en justifiant, la section du plan (IJK) avec le cube ABCDEFGH.