Jeudi 12 février 2004 $1°S_3$

DEVOIR de Mathématiques (2h)

(Calculatrice autorisée)

I/ **Statistiques** *(5 points)*

Une machine fabrique automatiquement un produit alimentaire, on pèse un lot de 400 produits :

Poids x_i (en g)	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	267
Effectif n_i	4	12	27	57	120	65	46	32	21	14	2

1°) a) Déterminer, en justifiant, la médiane, le 1er et le 3ème quartile.
b) Tracer le diagramme en boîte (boîte à moustaches) de la série statistique.

2°) Pour simplifier les calculs en pose $y_i = 260 - x_i$.
a) Tracer et compléter le tableau de la nouvelle série statistique (on fera figurer n_i, y_i, n_iy_i, et $n_iy_i^2$).
b) Calculer la moyenne $\bar{y}$ et l'écart-type s_y de la nouvelle série.
c) En déduire la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type s_x de la série statistique initiale.

II/ **Trigonométrie** *(5 points)*

1°) Simplifier les expressions suivantes :

a) $A = \sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} - \sin\frac{7\pi}{8}$.

b) $B = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$.

(On ne demande pas la valeur de $\sin\frac{\pi}{8}$ ni celle de $\cos\frac{\pi}{8}$)

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation : $\sin 3x = \cos x$.

III/ **Fonctions** *(10 points)*

Partie A – Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 128$.

1°) Calculer $g'(x)$, en déduire les variations de g et dresser son tableau de variations. (On ne demande ni les limites, ni le tracé de la courbe)
2°) En déduire que $g(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ en ne s'annulant qu'une seule fois.
3°) Résoudre l'équation : $g(x) = (x + 1)^4$. (On notera α et β les solutions dans la suite du problème)

Partie B – Etude de la fonction principale

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^4+8x^2+8x-40}{(x+1)^3}$

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1°) Déterminer les limites de f en -1, en $-\infty$ et en $+\infty$.
En déduire une droite (d) asymptote à C_f.
2°) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 3$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$.
3°) Démontrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
En déduire les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations complet
4°) Déterminer une équation de la tangente à Cf au point d'abscisse 1.
5°) Démontrer qu'il existe exactement deux points de la courbe (C_f) d'abscisses α et β où la tangente est parallèle à la droite (Δ).
6°) Recopier et compléter, à 10^{-2} près le tableau de valeurs suivant :

x	-8	-4	-3	-2	0	1	2	3
$f(x)$								

7°) Tracer la courbe C_f (unité graphique 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée) en utilisant au mieux tous les renseignements obtenus.

Formules :
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.