Lundi 12 janvier 2004 — $1°S_{1\text{-}2\text{-}3}$

Devoir de Synthèse de Mathématiques (3h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(3 points)*

Soient A(-4 ; 5), B(3 ; -2) et C(8 ;0), trois points du plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit (E) l'ensemble des points M du plan tel que : (1) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{BC} = 50$

On cherche à caractériser (E) par deux méthodes différentes.
Faire une figure sur la quelle on tracera l'ensemble (E), une fois celui-ci déterminé.

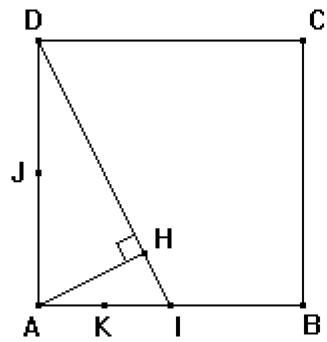
1°) Méthode algébrique

a) Soit M(x ; y), montrer que la relation (1) équivaut à : $x^2 - 4x + y^2 - 5y = 32$.
b) En déduire que (E) est un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

2°) Méthode géométrique

a) Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$.
b) En déduire que la relation (1) équivaut à $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 0$.
c) En déduire que (E) est un cercle dont on donnera un diamètre et vérifier que cela correspond aux résultats trouvés dans le 1°).

Exercice 2 *(5 points)*



Soit ABCD un carré de côté a. On note I, J et K les milieux des segments [AB], [AD] et [AI], puis H le projeté orthogonal de A sur la droite (DI).
On se propose de démontrer, de deux façons différentes, que (JH) et (HK) sont perpendiculaires.

1°) 1ère méthode.

a) Montrer que : $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HI} = 2\overrightarrow{HK}$ et que $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HJ}$.
b) En déduire que $4\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{HJ} = HA^2 + \overrightarrow{HI}.\overrightarrow{HD}$.
c) Démontrer que $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AD} = AH^2 + \overrightarrow{HI}.\overrightarrow{HD}$
d) En déduire que (JH) et (HK) sont perpendiculaires.

2°) 2ème méthode.

On considère le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
a) Déterminer une équation de la droite (DI) et de la droite (AH).
b) En déduire les coordonnées du point H.
c) Vérifier que (JH) et (HK) sont perpendiculaires.

…/…

Exercice 3 *(6 points)*

On désigne par (E) l'équation : $\cos(4x) = \sin x$.

1°) Résoudre cette équation dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. (On pourra se ramener à une égalité de deux cosinus)

Représenter les solutions trouvées sur le cercle trigonométrique.

2°) Justifier les égalités suivantes :

a) $\cos(4x) = 1 - 2\sin^2(2x)$.

b) $\cos(4x) = 8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 1$.

3°) En déduire que l'équation (E) équivaut à : $\begin{cases} X = \sin x \\ (F) : 8X^4 - 8X^2 - X + 1 = 0. \end{cases}$

4°) Montrer que 1 et $-\frac{1}{2}$ sont solutions de l'équation (F) ; déterminer les réels a, b et c tels que :

$8X^4 - 8X^2 - X + 1 = (X - 1)(2X + 1)(aX^2 + bX + c)$.

En déduire toutes les solutions de l'équation (F).

5°) déduire des résultats précédents la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{10}$.

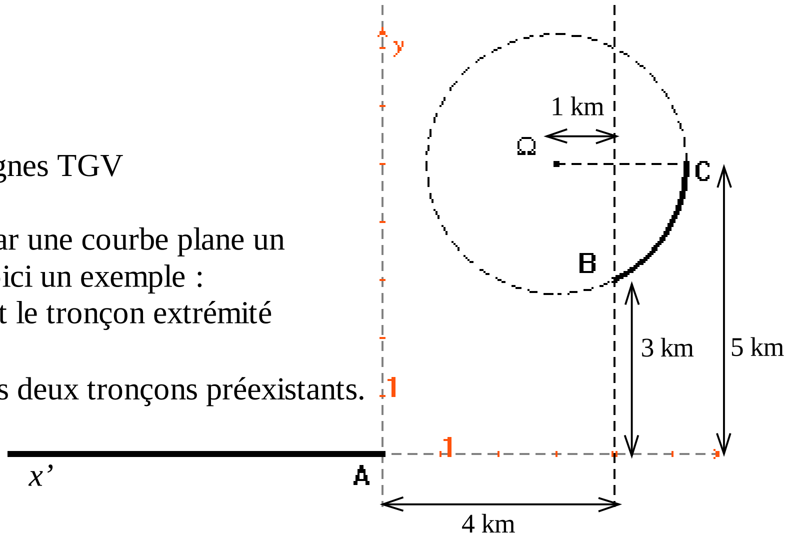
Exercice 4 *(6 points)*

Problème de raccordement dans le tracé des lignes TGV

Le problème du raccordement est de joindre par une courbe plane un tronçon origine et un tronçon extrémité. En voici un exemple :

Le tronçon origine est une demi-droite [Ax') et le tronçon extrémité est ici l'arc de cercle $\overset{\frown}{BC}$ de centre Ω.

Le raccordement doit être tangent à chacun des deux tronçons préexistants.



1°) On choisit comme tracé une courbe représentant une fonction polynôme du 3° degré f, dans un repère orthonormal $(A ; \vec{i}, \vec{j})$ (échelle 1 cm pour 1 km)

On a donc les points A(0 ; 0), B(4 ; 3), Ω(3 ; 5).

a) Expliquer pourquoi $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

b) T est la tangente à B au cercle de centre Ω passant par B. Déterminer une équation de T et son coefficient directeur. En déduire que $f(4) = 3$ et $f'(4) = \frac{1}{2}$.

2°) Le polynôme recherché s'écrit : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

a) Déterminer l'expression de la fonction dérivée f'.

b) Ecrire le système de quatre équations à quatre inconnues qui traduit les égalités trouvées au 1°)

c) Déterminer f.

3°) Soit g la fonction définie par : $g(x) = -\frac{x^3}{16} + \frac{7x^2}{16}$ sur [0 ; 4].

a) Démontrer que la courbe représentative de g vérifie les contraintes du problème.

b) Etudier le sens de variation de g sur [0 ; 4]

c) Faire le plan du tracé du TGV sur le parcours ABC.