Jeudi 23 janvier 2003 **Term $S_{1\text{-}2}$**

DEVOIR de Mathématiques (2 h.)

(Calculatrice autorisée)

Exercice. *(6 points)*

Soit l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé pipé (truqué) à 6 faces numérotées de 1 à 6 et à lire le numéro inscrit sur la face supérieure. La probabilité d'apparition de chaque face est donnée par le tableau ci-dessous :

face numéro	1	2	3	4	5	6
Probabilité d'apparition	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	?	$\frac{1}{24}$

1°) Déterminer la probabilité d'apparition de la face numéro 5.

2°) Soit les événements : A : « Obtenir un chiffre pair »
B : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 »

a) Déterminer P(A) et P(B).

b) Démontrer que $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$.

c) Déterminer $P_B(A)$ et $P_A(B)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

3°) Soit la variable aléatoire X égale au gain d'un joueur en euros dans le jeu suivant :

Si le joueur obtient le chiffre 1, il gagne 18 €
Si le joueur obtient le chiffre 6, il gagne 36 €
Dans tous les autres cas, le joueur perd 12 €

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et son espérance mathématique E(X).

Problème. *(14 points)*

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = x^3 - x + 1 - 2\ln x$.
où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1°) a) Montrer que $g'(x) = \frac{P(x)}{x}$, où P est un polynôme de degré 3.

b) Vérifier que $P(1) = 0$. Factoriser P.

c) Étudier le sens de variation de g. (On ne demande pas le calcul des limites en 0 et en $+\infty$)

2°) Déduire de la question précédente le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x + 1 + \frac{x + \ln x}{x^2}$.

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

1°) a) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

b) Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2} = 0$. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c) Justifier que les droites (D) et (D') d'équations respectives : $x = 0$ et $y = x + 1$ sont asymptotes à la courbe (C).

2°) a) Démontrer que la fonction h telle que $h(x) = x + \ln x$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et que cette fonction prend des valeurs positives et négatives.

b) En déduire que (D') coupe (C) en un point unique d'abscisse α vérifiant : $\alpha + \ln \alpha = 0$.
Démontrer que : $0{,}56 < \alpha < 0{,}57$.

3°) Étudier le sens de variation de f.

4°) Déduire du 3° l'existence d'une valeur unique β telle que $f(\beta) = 0$.
Démontrer que : $0{,}46 < \beta < 0{,}47$.

5°) Construire (C) et (D').