Vendredi 8 novembre 2002 **Term S_{1-2}**

DEVOIR de Mathématiques (2 h.)

(Calculatrice autorisée)

I/ Suite de nombres complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct (unité graphique : 4 cm).
A_0 est le point d'affixe 2. Pour tout entier naturel n, si A_n est un point d'affixe z_n , on désigne par A'_n le point d'affixe iz_n et par A_{n+1} le milieu de $[A_nA'_n]$.
On note ρ_n et θ_n le module et un argument de z_n.

1°) Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

2°) a) Démontrer que pour tout entier naturel n : $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$

b) En déduire que la suite (ρ_n) est géométrique et que la suite (θ_n) est arithmétique.
Préciser leur premier terme et leur raison.
c) Exprimer ρ_n et θ_n en fonction de n.
d) Déterminer la limite de la suite (ρ_n). Interpréter géométriquement ce résultat.
e) Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

3°) a) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $A_nA_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{n-1}A_n$.

b) Exprimer en fonction de n la longueur L_n de la ligne brisée $A_0A_1\ldots A_n$ puis déterminer sa limite.

II/ Fonction irrationnelle.

Partie A

1°) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $-x-2 \leq \sqrt{x^2+4x}$

2°) Montrer que pour tout $x \in]-\infty; -4[$: $-x-2 \geq \sqrt{x^2+4x}$

3°) Résoudre dans $]-4; 0[$ l'inéquation suivante : $x+2 \leq \sqrt{-x^2-4x}$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x+1+\left|\sqrt{x^2+4x}\right|$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm)

1°) Déterminer le signe de $x^2 + 4x$ en fonction de x et en déduire les expressions de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

2°) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe (C) admet une asymptote horizontale que l'on précisera.

3°) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote à la courbe (C).

4°) f est-elle dérivable en 0 ? en -4 ?

5°) Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour $x \in]-\infty; -4[\cup]0; +\infty[$ puis pour $x \in]-4; 0[$.

6°) Déterminer les variations de f et dresser son tableau de variations complet.

7°) Tracer les asymptotes puis la courbe (C).

Barème possible : I/ 8 **pts** - II/ 12 **pts**