Mardi 20 mai 2003 $1^{ère}$ S_3

DEVOIR de MATHEMATIQUES (2h)

(Calculatrice autorisée)

I/ Barycentres. *(2 points)*

Soit un triangle ABC et G le barycentre du système de points pondérés {(A,1) ; (B,2) ; (C,1)}.
1°) Faire une figure en expliquant la construction du point G.
2°) Déterminer trois réels α, β, γ tels que A soit le barycentre du système de points pondérés {(G,α) ;(B,β) ; (C,γ)}.

II/ Barycentres (bis). *(4 points)*

Soit un triangle ABC et I le point défini par : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Soient : J le barycentre des points pondérés (B ; 1) et (C ; 2)
K le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (C ; 4)

1°) Faire une figure en justifiant la construction des points J et K.
2°) En utilisant le barycentre G du système de points pondérés {(A ; 1) ; (B ; 2) ; (C ; 4)}, démontrer que les droites (AJ), (BK) et (CI) sont concourantes.

III/ Barycentres (ter). *(3 points)*

Soient deux points distincts A et B, on note I le milieu de [AB].
A tout point M du plan, on associe : Le point M’ barycentre du système {(A ; -1) ; (B ; 1) ; (M ; 2)}
Le point M″ barycentre du système {(A ; 1) ; (B ; 1) ; (M ; -1)}
1°) Démontrer que M’ est l’image de M par une translation que l’on précisera.
2°) Démontrer que M″ est l’image de M par une symétrie centrale que l’on précisera.
3°) Quand le point M décrit le cercle de centre A passant par I,
a) Quel est le lieu décrit par le point M’ ?
b) Quel est le lieu décrit par le point M″ ?

IV/ Etude de fonction. *(11 points)*

Soit f la fonction définie sur R\{2} par : $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 2}$

1°) Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout $x \in$ R\{2} on ait :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$$

2°) Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
3°) Démontrer que la droite (D) d’équation $y = x + 3$ est asymptote à la courbe C_f représentative de f et préciser la position de C_f par rapport à (D).
Préciser l’autre droite asymptote à C_f.
4°) Etudier les variations de la fonction f.
5°) Déterminer les coordonnées du point Ω intersection des deux asymptotes et démontrer que Ω est un centre de symétrie pour la courbe C_f.
6°) Déterminer l’intersection de la courbe C_f avec les axes du repère et l’équation des tangentes en chacun de ces points.
7°) Déterminer les abscisses des points de la courbe C_f où la tangente à la courbe est perpendiculaire à la droite (D).
8°) Tracer la courbe C_f dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) en faisant apparaître tous les renseignements précédents.