Mercredi 6 novembre 1°S$_3$

Devoir de Mathématiques (2h)

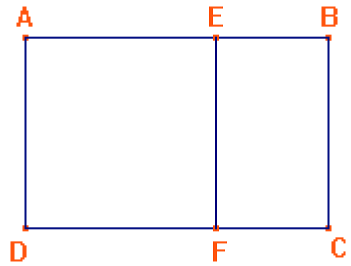
(Calculatrice autorisée)

Exercice 1

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $x+1 \geq \frac{1}{x}-1$

2°) Résoudre le système suivant : $\begin{cases} (x-1)^2 + \dfrac{3y}{y-1} = 4 \\ 6(x-1)^2 - \dfrac{2y}{y-1} = -1 \end{cases}$ (On pourra poser $X = (x-1)^2$ et $Y = \dfrac{y}{y-1}$)

Exercice 2



Un rectangle ABCD est dit « rectangle d'or » lorsqu'ayant tracé le carré intérieur AEFD, on a : $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BC}{EB}$.

Les rapports « longueur sur largeur » sont donc les mêmes dans les deux rectangles. Ce rapport s'appelle le nombre d'or (noté Φ) ; il est supérieur à 1 et son inverse s'appelle la section dorée.

1°) Déterminer la valeur de Φ. (On pourra prendre AB = x et BC = 1).

2°) Calculer $\dfrac{1}{\Phi}$, $\Phi - \dfrac{1}{\Phi}$ puis $\dfrac{1}{\Phi - 1}$. EBCF est-il un rectangle d'or ?

Exercice 3

Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm), on note A le point de coordonnées A(3 ; 6) et (C) la courbe d'équation : $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$.
Le but de l'exercice est de construire les tangentes à (C) passant par A.

1°) Démontrer que (C) est un cercle dont on déterminera les coordonnées du centre Ω et le rayon R.
(Faire une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice)
2°) Justifier que le point A se trouve à l'extérieur du cercle (C).
3°) Soit (C') le cercle de diamètre [AΩ] où Ω(2 ; -1).
a) Déterminer une équation cartésienne du cercle (C').
b) Vérifier que le point I(6 ; 2) appartient aux deux cercles (C) et (C').
c) Déterminer une équation de la droite (AI).
d) Démontrer que la droite (AI) est tangente au cercle (C).
4°) a) Déterminer, par le calcul, les coordonnées du deuxième point J d'intersection des cercles (C) et (C').
b) Que peut-on dire de (AJ) par rapport à (C) ? Le justifier.

Exercice 4

Soit ABC est un triangle rectangle en A. On note H le projeté orthogonal de A sur (BC). Une droite (D) passant par C coupe la droite (AH) en M et le cercle de diamètre [BC] en N.

1°) Faire une figure lisible .

2°) Démontrer que $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CB} = CA^2$

Barème possible :

Ex.1 : *5 points* - **Ex.2 :** *4 points* - **Ex.3 :** *8 points* - **Ex.4 :** *3 points* -