Mercredi 2 octobre 1°S$_3$

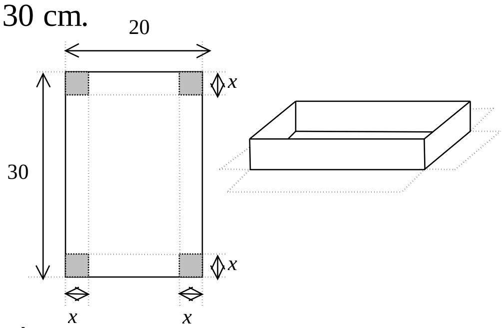
DEVOIR COMMUN DE MATHEMATIQUES (2h)

(Calculatrice autorisée)

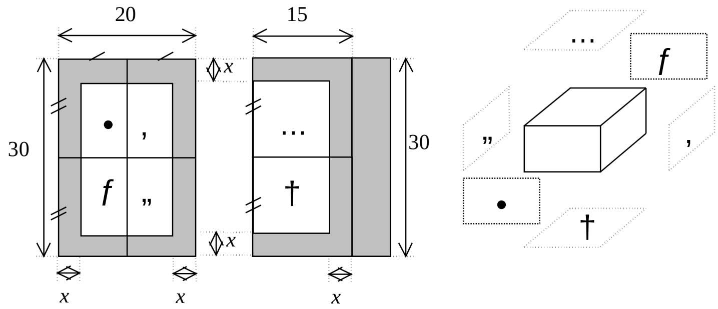
Exercice 1

A/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante: $x(20 - 2x)(30 - 2x) > (10 - x)(15 - x)^2$.

B/ Deux personnes décident de construire une boîte en carton en utilisant des feuilles de 20 cm sur 30 cm.



1ère personne



2ème personne

1°) La première personne utilise une seule feuille en découpant un patron de la boîte comme indiqué sur la figure (x représentant une certaine longueur en cm).
Après découpage, pliage et collage, elle obtient une boîte sans couvercle.
a) Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour x ?
b) Exprimer la largeur l_1, la longueur L_1 et la hauteur h_1 (en fonction de x) de cette boîte.
c) Exprimer le volume $V_1(x)$ de la boîte en fonction de x.
2°) La deuxième personne utilise deux feuilles : elle découpe les quatre côtés de la boîte dans la première, et dans la deuxième feuille le fond et le couvercle, comme indiqué sur la figure (x représentant une certaine longueur en cm).
a) Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour x ?
b) Exprimer la largeur l_2, la longueur L_2 et la hauteur h_2 (en fonction de x) de cette boîte.
c) Exprimer le volume $V_2(x)$ de la boîte en fonction de x.
3°) Interpréter le résultat de la partie A/ par une phrase concernant les 2 boîtes ci-dessus.

Exercice 2

1°) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - x$

a) Démontrer que $f(x)$ peut s'écrire aussi : $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

b) En déduire que la courbe C_f représentative de f est l'image d'une courbe de référence par une translation que l'on précisera.

c) Tracer la courbe C_f. dans un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm)

2°) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $g(x) = \frac{x}{x-1}$

a) Démontrer que $g(x)$ peut s'écrire aussi : $g(x) = \frac{1}{x-1} + 1$

b) En déduire que la courbe C_g représentative de g est l'image d'une courbe de référence par une translation que l'on précisera.

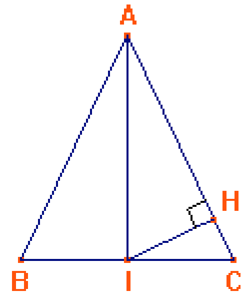
c) Tracer la courbe C_g. dans le repère précédent.

3°) a) Déterminer algébriquement les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$

b) Vérifier graphiquement le résultat précédent.

Exercice 3

Soit ABC un triangle isocèle en A. On note I le milieu de [BC] et H le projeté orthogonal de I sur la droite (AC).



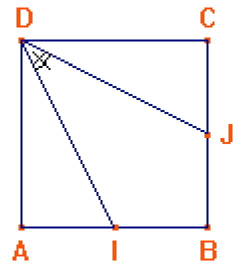
1°) Démontrer que : $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CH}$

2°) Calculer : $\overrightarrow{AH}.\left(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}\right)$

En déduire que $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HC}$

3°) A l'aide des résultats précédents, démontrer que $\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AH}\right).\overrightarrow{BH} = 0$

En déduire que si on note J le milieu de [IH], alors (AJ) est orthogonale à (BH).



Exercice 4

Soit un carré ABCD de côté *a*, on note I le milieu de [AB] et J le milieu de [BC].

1°) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{DJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

En déduire la valeur de $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{DJ}$ en fonction de *a*.

2°) Calculer les longueurs DI et DJ en fonction de *a*.

3°) Déduire des résultats précédents la valeur exacte de $\cos(\widehat{IDJ})$, puis une valeur approchée à 1° près de l'angle $\widehat{IDJ}$.

Barème possible :

Ex.1 : *6 points* - **Ex.2 :** *5 points* - **Ex.3 :** *4 points* - **Ex.4 :** *5 points* -