Mai 2002 $1^{ère}$ S

# *Devoir commun de Mathématiques (3 h)*

*(Calculatrice autorisée)*

## Exercice 1

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points A(1 ;2 ;3), B(-1 ; 3 ; 5), C(-1 ; 3 ; 2) et D(1 ; 5 ; 3).

**1°)** Calculer les longueurs AB, BC, CD et AD.
ABCD est-il un losange ?

**2°)** Déterminer les coordonnées du milieu I de [BD] et calculer IA et IC.
I est-il le milieu de [AC] ?

## Exercice 2

La population d'une ville nouvelle est donnée par la formule : $P(t)=\dfrac{40(t+5)^2}{t^2+100}$

où $t$ est le temps écoulé depuis 1970 (exprimé en années) et $P(t)$ est le nombre d'habitants (exprimé en milliers).
On se propose d'étudier l'évolution de cette population.

**A. Etude de fonction.**

Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{(x+5)^2}{x^2+100}$

**1°)** a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
b) En déduire le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$ (on précisera les extremum).

**2°)** Etudier les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. En donner une interprétation graphique.

**B. Etude de la population.**

**1°)** Préciser le réel $k$ tel que $P(t) = k.f(t)$, pour $t\in[0\,;+\infty[$.

**2°)** a) Déduire de la partie A, le tableau complet des variations de $P$ sur $[0\,;+\infty[$.
b) En déduire l'année pour laquelle la population de cette ville sera maximale.
c) Interpréter par une phrase la limite de $P$ en $+\infty$.

**3°)** On rappelle que le rythme de croissance d'une population $P(t)$ est assimilé à la dérivée de la fonction $P$ par rapport au temps $t$.
Calculer le rythme de croissance de cette population en 1980 et celui à prévoir en 2040.

**4°)** Représenter cette population dans un repère orthonormal bien choisi (on fera apparaître tous les résultats obtenus aux questions précédentes).

## Exercice 3

Un jardinier amateur tond sa pelouse tous les samedis, et recueille à chaque fois 120 litres de gazon coupé qu'il stocke dans un bac à compost de 300 litres.
Chaque semaine, les matières stockées perdent par décomposition, ou prélèvement, les trois quarts de leur volume.
On appelle $V_n$ le volume en litres stocké le *n*-ième samedi de tonte. On a donc : $V_1 = 120$.

**1°)** Montrer que $V_{n+1} = 120 + \frac{1}{4} V_n$.
Cette suite est-elle arithmétique ? géométrique ?

**2°)** On définit, pour tout entier $n \geq 1$, le nombre $t_n$ par $t_n = 160 - V_n$.
Démontrer que la suite $(t_n)$ est géométrique, et préciser son premier terme et sa raison.

**3°)** a) Exprimer $t_n$ en fonction de $n$ et en déduire le terme général de la suite $(V_n)$.
b) Montrer que la suite $(V_n)$ est majorée par 160.
c) La suite $(V_n)$ est-elle convergente ? Si oui, préciser alors sa limite.

**4°)** Les conditions restant les mêmes, le bac de stockage sera-t-il un jour rempli ?

## Exercice 4

| Mois | Température (Ville A) | Température (Ville B) |
|---|---|---|
| 1 | -3 | 7 |
| 2 | 1 | 6 |
| 3 | 4 | 11 |
| 4 | 8 | 14 |
| 5 | 11 | 15 |
| 6 | 19 | 18 |
| 7 | 26 | 21 |
| 8 | 30 | 23 |
| 9 | 21 | 18 |
| 10 | 10 | 15 |
| 11 | 5 | 10 |
| 12 | 2 | 6 |

On a relevé les températures dans deux villes de France le premier jour de chaque mois pendant une année. Le tableau ci-dessous indique la liste des températures observées, exprimées en degrés Celsius.

**1°)** a) Calculer la température moyenne et l'écart type des deux séries de températures.
b) Les valeurs des écarts types obtenus vous semblent-elles confirmer l'impression donnée par le tableau ?

**2°)** Représenter sur un même graphique les diagrammes à moustaches associés aux deux séries de températures.
L'observation de ces diagrammes confirme-t-elle les constatations de la question 1 ?

**3°)** Semble-t-il raisonnable de penser que l'une des villes a un climat plutôt océanique et l'autre un climat plutôt continental ?

**4°)** Si le relevé des températures avait été effectué par des Américains, ils auraient probablement utilisé comme unité le degré Fahrenheit. La formule de conversion d'une température de $t$ degrés Celsius en une température de T degrés Fahrenheit est la suivante : $T = 1{,}8\, t + 32$.
Calculer la moyenne et l'écart type de chaque série de température lorsque celles-ci sont exprimées en degrés Fahrenheit.

**NB** : On indiquera les formules utilisées et on donnera les résultats exacts puis arrondis à $10^{-1}$.

**Barème possible** : **Ex 1** : *3 pts* – **Ex 2 :** *8 pts* – **Ex 3 :** *4 pts* – **Ex 4 :** *5 pts*.