Mercredi 27 mars 2002 — 1$^{\text{ère}}$ S_3

DEVOIR de MATHEMATIQUES (2h)

(Calculatrice autorisée)

I/ Fonctions et suites. *(9 points)*

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = n - 1 + \dfrac{4}{n}$

A] Etude directe.

1°) Calculer les 4 premiers termes de la suite u.
2°) Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n et en déduire à partir de quel rang la suite u est monotone.
3°) La suite u est-elle convergente ou divergente ? (Justifier)

B] Etude indirecte.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x}$ et C_f sa courbe représentative.

1°) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2°) En déduire que C_f admet une asymptote verticale et démontrer que C_f admet également une asymptote oblique dont on donnera une équation.
3°) Calculer $f'(x)$ et déterminer les variations de f. Dresser le tableau de variations complet de f.
4°) Vérifier les résultats obtenus dans la partie A.
5°) Tracer la courbe C_f dans un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm)

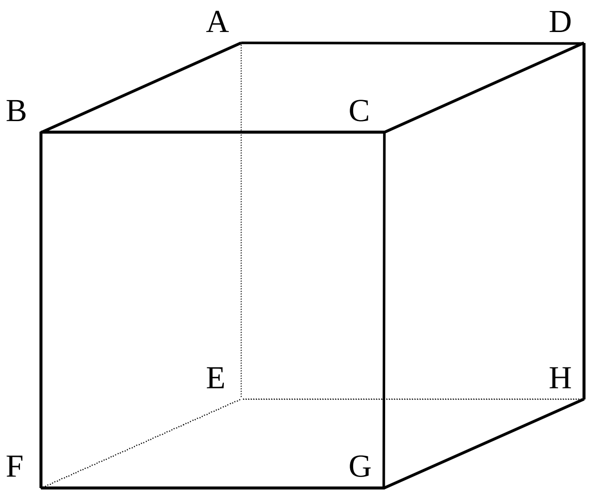
II/ Suites récurrentes. *(6 points)*

Soit u la suite définie par : $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 3 + \dfrac{1}{2} u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1°) Tracer dans un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm) les droites D et Δ d'équations respectives : $y = \dfrac{1}{2}x + 3$ et $y = x$. En déduire une construction des 4 premiers termes de la suite u (Expliquer cette construction)

2°) Soit v la suite définie par : $v_n = u_n - 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Exprimer pour tout entier n, v_{n+1} en fonction de v_n.
b) En déduire que v est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
c) Déterminer une expression de v_n en fonction de n et en déduire une expression de u_n en fonction de n.
d) Justifier que la suite v est convergente et en déduire la convergence de la suite u.



III/ Géométrie dans l'espace. *(5 points)*

Sur le cube ci-contre, on note I le point tel que $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,

J le milieu de [BC] et K le point tel que $\overrightarrow{CK} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{CG}$.

1°) Placer I, J et K sur la figure.
2°) Justifier que (IJ) et (CD) sont sécantes.
On note P leur point d'intersection.
3°) En déduire l'intersection des plans (IJK) et (DCG).
4°) Compléter, en justifiant, la section du plan (IJK) avec le cube ABCDEFGH.
5°) Tracer, en justifiant, l'intersection des plans (IJK) et (EFG)