Lundi 14 janvier 2002 $1^{\text{ère}}$ S

Devoir de MATHEMATIQUES (3h)

(Calculatrice autorisée)

I/ Relations métriques

1°) Soit un triangle ABC, on note a = BC, b = CA, c = AB, $\hat{A} = \widehat{CAB}$, $\hat{B} = \widehat{ABC}$ et $\hat{C} = \widehat{BCA}$.

a) Rappeler la formule des sinus liant les mesures des trois côtés du triangle aux valeurs des sinus des angles des trois sommets du triangle.

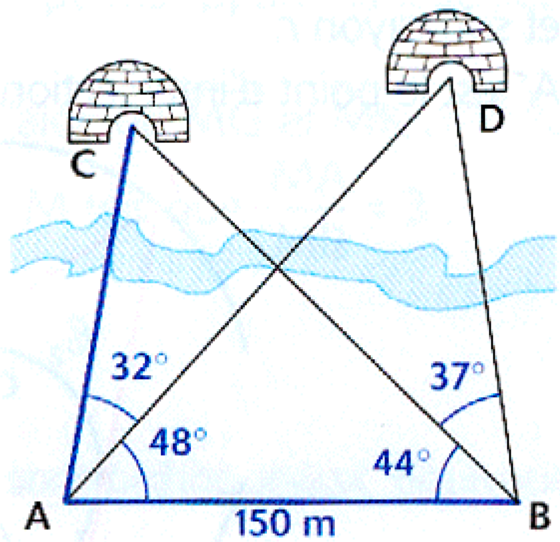
b) Rappeler le théorème d'Al-Kashi appliqué à un côté du triangle. (appelé aussi théorème de Pythagore généralisé)

2°) Un explorateur cherche à déterminer la distance entre deux igloos notés C et D. Une crevasse l'empêchant d'y accéder directement, il effectue des mesures d'angles entre deux positions A et B distantes de 150 m comme l'indique le dessin.

a) Déterminer une mesure approchée à 1 cm près de la longueur AC.

b) Déterminer une mesure approchée à 1 cm près de la longueur AD.

c) Déterminer une mesure approchée à 2 cm près de la longueur CD.



II/ Trigonométrie

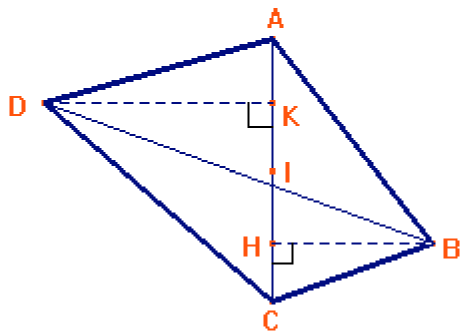
1°) Résoudre dans R l'équation : $4x^3 - 3x = 0$.

2°) a) En déduire la résolution dans $]-\pi\,;\,\pi]$ de l'équation : (E) $4\cos^3 x - 3\cos x = 0$.
b) Placer les solutions de l'équation (E) sur un cercle trigonométrique.

4°) a) Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ l'équation : (E') $\cos 3x = 0$.
b) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. Que remarque-t-on ?

III/ Produit scalaire

Soit ABCD le quadrilatère représenté ci-contre.
I est le milieu de la diagonale [AC], H et K sont les projetés orthogonaux respectifs de B et D sur (AC).

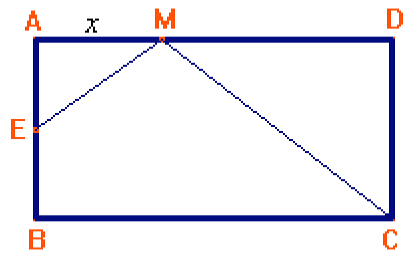


1°) a) Montrer que $AB^2 - BC^2 = 2\,\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{AC}$

b) Exprimer de même $AD^2 - DC^2$ à l'aide de $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2°) En déduire que si les diagonales du quadrilatère sont perpendiculaires alors $AB^2 + DC^2 = BC^2 + AD^2$.

IV/ Second degré



ABCD est un rectangle tel que AB = 1 et AD = 2. E est le milieu de [AB]. Pour tout point M du segment [AD], on pose AM = x et on note : $f(x) = ME^2 + MC^2$.

1°) Quel est l'ensemble I des valeurs que peut prendre x ?

2°) a) Montrer que, pour tout $x \in I$, $f(x) = 2x^2 - 4x + \frac{21}{4}$

b) Etudier les variations de f et déterminer les éléments caractéristiques de la représentation graphique C_f de f sur I. Tracer la courbe C_f dans un repère orthogonal (unités graphiques : $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 4$ cm.

c) En déduire la valeur minimale de $ME^2 + MC^2$.
Quelles sont alors les dimensions du triangle MEC et calculer une mesure de l'angle $\widehat{EMC}$ à 1° près.

3°) a) Montrer que MEC est rectangle en M si et seulement si $f(x) = \frac{17}{4}$.

b) En déduire les valeurs de x pour lesquelles le triangle MEC est rectangle en M.
c) Soit (Γ) le cercle de diamètre [EC], donner une construction précise des points M_1 et M_2 correspondants aux solutions de la question précédente.

V/ Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a) Déterminer l'expression de la fonction dérivée $f'(x)$ de la fonction f.
b) En déduire les variations de la fonction f.

2°) a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
b) Etudier la position relative de la courbe C_f par rapport à T.

3°) a) Vérifier qu'une équation de la tangente T_a au point d'abscisse a de la courbe C_f est donné par :

$$T_a : \ y = \left(\frac{3}{2}a^2 - \frac{3}{2}\right)(x-a) + \frac{1}{2}a^3 - \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}$$

b) En déduire les coordonnées des points de la courbe C_f pour lesquels la tangente à C_f passe par le point I(1 ;0).

4°) Tracer la courbe C_f et les tangentes aux points d'abscisses 0 et $\frac{3}{2}$ (unité graphique : 2 cm).

Barème possible
I/ 4 points – II/ 4 points – III/ 3 points – IV/ 4 points

<<< ***Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction*** >>>